

Temat: **Powtórzenie wiadomości z działu „Funkcja liniowa”.**

Poniżej jest teoria z działu „Funkcja liniowa” oraz zestaw zadań, które obowiązują.

W piątek SPRAWDZIAN – w środę lub czwartek roześlę linki testu, który będziecie musie rozwiązać.

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y ($f: X \rightarrow Y$) nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f , a jego elementy – **argumentami**. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f .

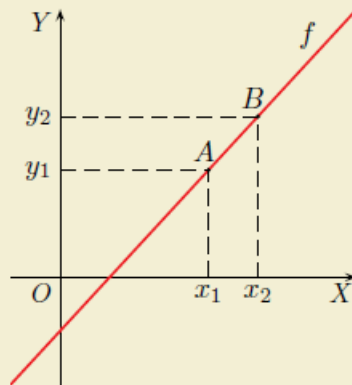
Element $y \in Y$, który został przyporządkowany argumentowi $x \in X$, nazywamy **wartością funkcji f** dla argumentu x i zapisujemy $y = f(x)$. **Zbiorem wartości** funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$. Zbiór wartości oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Miejszem zerowym funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $X \subset \mathbf{R}$, nazywamy taki argument x , dla którego $f(x) = 0$.

Funkcją **liniową** nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi. Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, jest równy:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

- rosnąca dla $a > 0$,
- malejąca dla $a < 0$,
- stała dla $a = 0$.

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

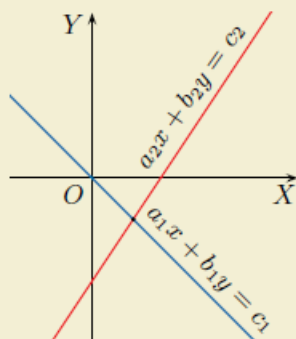
- równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

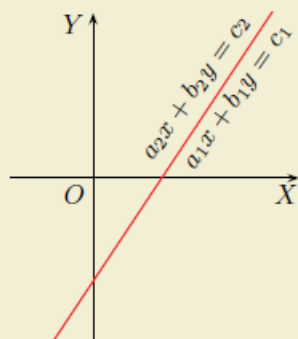
Karta pracy nr 2 – klasa I (po gimnazjum)

Układ równań liniowych $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ nazywamy:

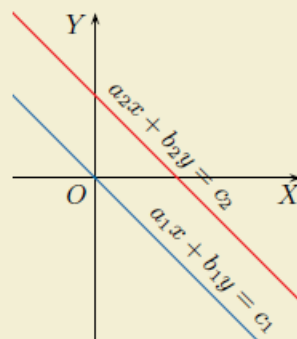
- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.



Układ oznaczony – proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.



Układ nieoznaczony – oba równania tego układu opisują tę samą prostą.



Układ spreczny – proste opisane równaniami tego układu są równoległe i się nie pokrywają.

• Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

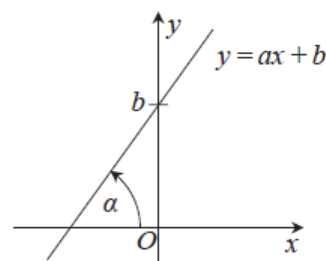
Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox ; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy ; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.

Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

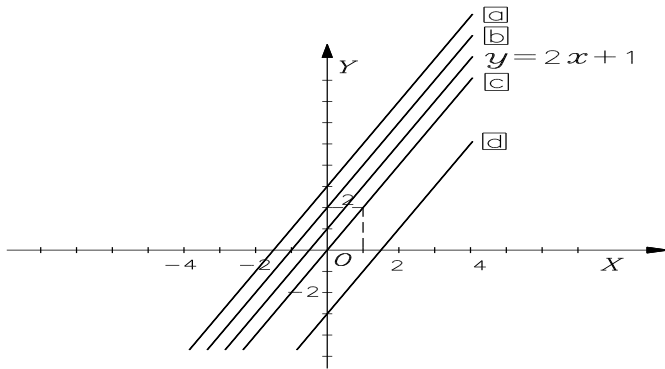
Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

Poniżej znajduje się test, który WARTO rozwiązać.

Karta pracy nr 2 – klasa I (po gimnazjum)

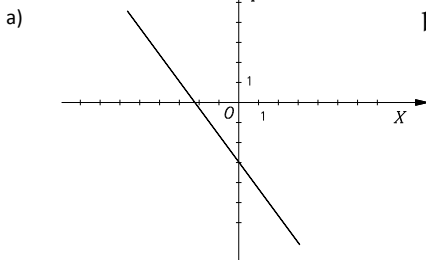
1. Na wykresie przedstawione są proste równoległe. Równanie jednej z nich jest znane. Podaj równania odpowiednich prostych.



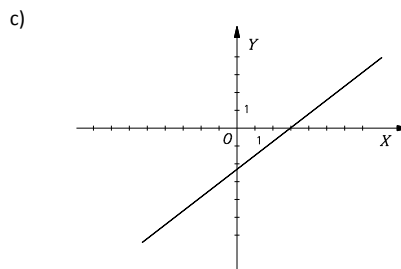
a) $y = \dots\dots\dots$ b) $y = \dots\dots\dots$

c) $y = \dots\dots\dots$ d) $y = \dots\dots\dots$

2. Które, spośród punktów a, b, c lub d przedstawiają funkcję liniową rosnącą?

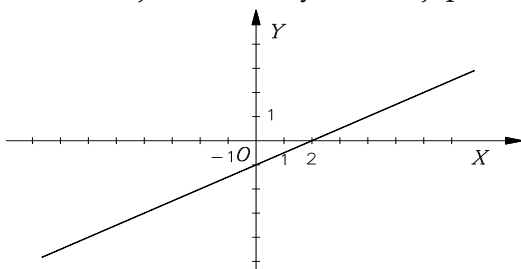


b) $y = -5x + 4$



d) $y = \frac{1}{101}x - 5$

3. Miejscem zerowym funkcji przedstawionej na wykresie jest:



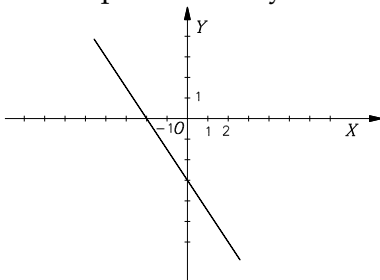
a) $(2, 0)$

b) 2

c) -1

d) $(0, -1)$

4. Na podstawie wykresu funkcji:



uzupełnij zdania.

a) Punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY to

b) Wzór funkcji przedstawionej na wykresie to

c) Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla

d) Funkcja przyjmuje wartości nieujemne dla

5. Równanie kierunkowe prostej $y = -\frac{2}{3}x - 5$ zapisane w postaci ogólnej to:

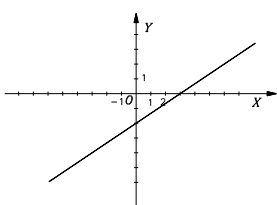
a) $-2x - 3y - 15 = 0$

b) $2x + 3y + 5 = 0$

c) $2x + 3y + 15 = 0$

d) $2x + 3y = 5$

6. Które równanie nie opisuje prostej przedstawionej na rysunku?



a) $y = \frac{2}{3}x - 2$

b) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

c) $-2x + 3y + 6 = 0$

d) $2x + 3y + 6 = 0$

Karta pracy nr 2 – klasa I (po gimnazjum)

7. Prosta o równaniu $y = ax + b$ przechodzi przez punkty $A(3, 1)$ i $B(-2, 4)$. Współczynnik kierunkowy tej prostej to:

- a) $-\frac{3}{5}$ b) -3 c) $\frac{3}{5}$ d) $-\frac{5}{3}$

8. Dwie proste prostopadłe przecinają się w jednym punkcie $A(2, -3)$.

Współczynnik kierunkowy jednej z nich jest równy $-\frac{3}{4}$. Na podstawie tych informacji określ równania tych prostych i uzupełnij zdania:

- a) Równaniem prostej o znanym współczynniku kierunkowym jest $y = \dots\dots\dots$
 b) Równaniem prostej prostopadłej do powyższej i przechodzącej przez punkt A jest $y = \dots\dots\dots$

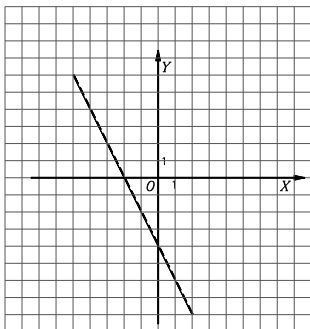
9. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + y = -6 \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ jest następująca para liczb:

- a) $x = 2, y = -10$ b) $x = -5, y = 4$ c) $x = -1, y = -4$ d) $x = -10, y = 6$

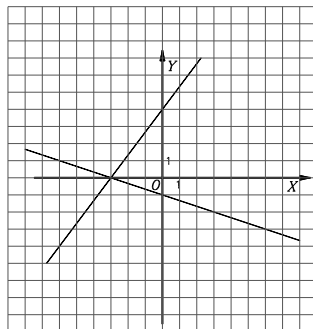
10. Spośród podanych układów równań wskaż układy nieoznaczone.

- a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3}{8}x - 2y = 5 \\ -\frac{3}{4}x + 4y = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ -x + \frac{2}{5}y = 3 \end{cases}$

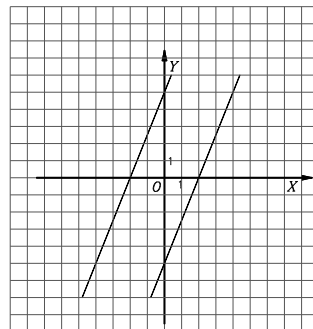
11. Połącz w odpowiednie pary wykres z zapisanym układem równań tak, aby wykres przedstawiał rozwiązanie graficzne tego układu.



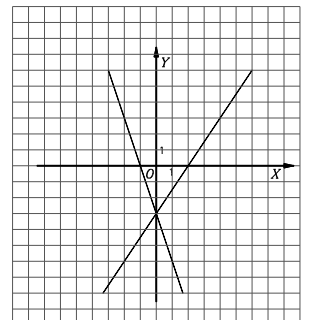
a)



b)



c)



d)

I) $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$

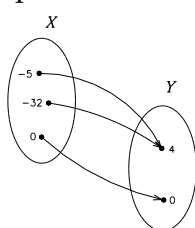
II) $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ y = \frac{5}{2}x + 5 \end{cases}$

III) $\begin{cases} 4x - 3y = -12 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$

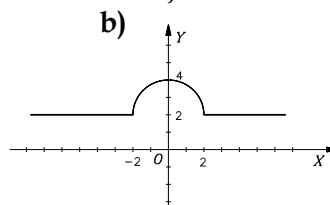
IV) $\begin{cases} -3x + 2y = -6 \\ y = -3x - 3 \end{cases}$

12. Wskaż, gdzie prawidłowo została określona funkcja $f: X \rightarrow Y$

a)



b)



c)

x	-5	3	8
$y = f(x)$	-1	4	-1

d) Każdemu uczniowi twojej klasy (x) przypisujemy numer w dzienniku (y).

Karta pracy nr 2 – klasa I (po gimnazjum)

13. Dana jest funkcja:

x	$-2\sqrt{6}$	-4	$-2,7$	0	$14\frac{1}{7}$
$y = f(x)$	0	$-1\frac{1}{3}$	$\sqrt{2}$	$6\frac{1}{8}$	0

Wypisz

- A. zbiór argumentów
- B. zbiór wartości
- C. miejsca zerowe funkcji

14. Dana jest funkcja: „każdej liczbie ze zbioru $\{-1,0,1,2,3\}$ przyporządkowujemy liczbę o 2 mniejszą”. Przedstaw ją trzema innymi sposobami.

15. Napisz równanie prostej równoległej do $y = -2x + 4$ i przechodzącej przez punkt $A = (2, 5)$.

16. W hostelu są pokoje 2- i 4 - osobowe. Wszystkich pokoi jest 40. Hostel może jednorazowo przyjąć maksymalnie 126 gości. Ile jest w tym hostelu pokoi 2-osobowych, a ile 4-osobowych?

Temat: **Dziedzina funkcji.**

Przypomnienie:

Oznaczenia:

$\neq$ – różne (np. $x \neq 2$ – czyt. x różne od 2)

$\in$ – należy (np. $x \in W$ – czyt. x należy do zbioru liczb wymiernych)

$\notin$ – nie należy (np. $x \notin NW$ – czyt. x nie należy do zbioru liczb niewymiernych)

Nierówności:

$<$ – znak mniejszości
 $>$ – znak większości } znaki ostre

$\leq$ – znak mniejszości równości
 $\geq$ – znak większości równości } znaki nieostre

Wyznaczanie dziedziny funkcji

Określając dziedzinę funkcji danej wzorem, przyjmujemy, że jest ona zbiorem wszystkich argumentów, dla których ten wzór ma sens.

Podczas wyznaczania dziedziny funkcji musimy pamiętać, że:

- dzielenie przez zero jest niewykonalne, w przypadku ułamka mianownik musi być różny od 0,
- liczba podpierwiastkowa w pierwiastkach stopnia parzystego nie może być ujemna
- liczba podpierwiastkowa w mianowniku pewnego ułamka musi być liczbą dodatnią

Oznaczmy przez W pewne wyrażenie. Wtedy:

Postać funkcji	Warunek	Komentarz
$y = \frac{a}{W}$	$W \neq 0$	Mianownik musi być różny od zera.
$y = \sqrt[n]{W}$	$W \geq 0$	Pierwiastek parzystego stopnia wymaga argumentu nieujemnego.

Przykład:

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{5x}{2x-8}$

mianownik to $2x - 8$ i musi być on różny od 0, czyli: $2x - 8 \neq 0$

$$2x \neq 8 \quad | :2$$

$$x \neq 4$$

Rozwiązujemy jak równanie liniowe:

- niewiadome na lewo, wyrazy wolne na prawo:
- przenosząc pamiętamy o zmianie znaków na przeciwne!

Dziedziną funkcji f są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz 4, co będziemy zapisywać $D_f = R \setminus \{4\}$

(kiedy do wzoru za x podstawimy 4, to w mianowniku otrzymamy 0, a **DZIELIĆ PRZEZ ZERO NIE MOŻNA!!!**)

Karta pracy nr 2 – klasa I (po gimnazjum)

1. Określ dziedzinę funkcji f (zwróć uwagę na to, że mianownik nie może być równy 0).

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ d) $f(x) = \frac{1}{2x-6}$ _____

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ _____ e) $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ _____

c) $f(x) = \frac{x}{x+3}$ _____ f) $f(x) = \frac{x}{0,5x+2}$ _____

Przykład:

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{5-2x}$

Liczba podpierwiastkowa w pierwiastkach stopnia parzystego nie może być ujemna, czyli:

$$5 - 2x \geq 0$$

$$-2x \geq -5 | : (-2)$$

$$x \leq 2,5$$

Rozwiązujemy nierówność

liniową:

- niewiadome na lewo, wyrazy

wolne na prawo:

- przenosząc pamiętamy o

zmianie znaków na przeciwny;

- dzieląc lub mnożąc przez

liczbę ujemną zmieniamy znak

nierówności na przeciwny!

$$D_f = \left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right]$$

2. Określ dziedzinę funkcji f (zwróć uwagę na to, że pod pierwiastkiem nie może wystąpić liczba ujemna).

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $x-1 \geq 0$, skąd $x \geq 1$, czyli $D_f = \langle 1; \infty \rangle$

b) $f(x) = \sqrt{x+5}$ _____

c) $f(x) = \sqrt{2-x}$ _____

d) $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{2}x}$ _____